

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Guilherme Fernandes de Figueiredo

**Estudo numérico da decolagem de um modelo de
aeronave com três graus de liberdade**

São Carlos

2019

Guilherme Fernandes de Figueiredo

**Estudo numérico da decolagem de um modelo de
aeronave com três graus de liberdade**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Aeronáutica, da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Engenheiro Aeronáutico.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo A. Angélico

**São Carlos
2019**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

F363e Fernandes de Figueiredo, Guilherme
 Estudo numérico da decolagem de um modelo de
 aeronave com três graus de liberdade / Guilherme
 Fernandes de Figueiredo; orientador Ricardo Afonso
 Angélico. São Carlos, 2019.

Monografia (Graduação em Engenharia Aeronáutica)
-- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade
de São Paulo, 2019.

1. desempenho de aeronaves. 2. decolagem. 3. modelo
numérico. 4. dinâmica do corpo rígido. I. Título.

FOLHA DE APROVAÇÃO

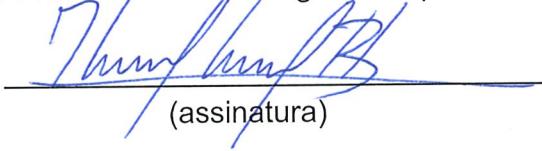
Candidato: Guilherme Fernandes de Figueiredo

Título do TCC: Estudo numérico da decolagem de um modelo de aeronave com três graus de liberdade

Data de defesa: 19/11/2019

Comissão Julgadora	Resultado
Professor Doutor Jorge Henrique Bidinotto	Aprovado
Instituição: EESC - SAA	
Professor Doutor Hernan Dario Ceron Muñoz	Aprovado
Instituição: EESC - SAA	

Presidente da Banca: Professor Doutor Jorge Henrique Bidinotto



(assinatura)

A todos os professores que me guiaram e orientaram em minha jornada até aqui.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Doutor Ricardo, que sempre se mostrou solícito e paciente na orientação deste trabalho. Suas aulas sempre foram ministradas com excelência, clareza e afinco, em especial as da disciplina de Desempenho de Aeronaves, que motivou o presente estudo. Seu apoio foi indispensável na realização deste trabalho e sua contribuição para minha formação como engenheiro foi essencial.

Agradeço também a todos os docentes do Departamento de Engenharia Aeronáutica, bem como aos demais docentes, pertencentes a outros departamentos e institutos da Escola de Engenharia de São Carlos, que participaram ativamente da minha formação ao longo da graduação. Agradeço pela riqueza da informação e pela alta qualidade das aulas, que certamente farão a diferença em minha carreira como engenheiro aeronáutico. Um agradecimento especial aos Professores Hernán Darío Cerón-Muñoz (SAA) e Jorge Henrique Bidinotto (SAA), que se dispuseram a participar da banca e a avaliar este trabalho, e aos Professores Everaldo de Mello Bonotto (SME) e Mario Francisco Mucheroni (SEM), que redigiram minha carta de recomendação para o programa de Duplo Diploma na École Centrale de Nantes, etapa fundamental do meu percurso acadêmico.

Finalmente, gostaria de agradecer à minha família e a todos os meus amigos, que sempre me apoiaram em minhas escolhas com toda a atenção e todo o carinho, nos momentos fáceis e difícieis, desde a minha vinda para São Carlos.

RESUMO

FERNANDES DE FIGUEIREDO, G. **Estudo numérico da decolagem de um modelo de aeronave com três graus de liberdade.** 2019. 57p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Os modelos de decolagem amplamente divulgados nos livros-texto da área de desempenho de aeronaves são descritos a partir da análise da dinâmica de um único ponto material (centro de gravidade). Esses modelos são limitados e não permitem prever adequadamente as acelerações translacionais e rotacionais da aeronave. Nesse contexto, o presente trabalho procurou analisar o desempenho em decolagem de uma aeronave a partir de um modelo com três graus de liberdade, para isso resolvendo numericamente um problema de valor inicial. A dinâmica foi descrita a partir de um modelo em espaço de estados, o qual foi resolvido utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. A implementação dos códigos foi realizada em Python. Obteve-se uma ferramenta que permite analisar a decolagem de uma aeronave tratando-a como um corpo rígido, com os graus de liberdade de translação horizontal e vertical e de rotação (arfagem). Também, graças ao modelo desenvolvido, tem-se um código *open source* que viabiliza o estudo de parâmetros importantes da decolagem, tais como distância e tempo de decolagem, em função de variáveis como a posição do centro de gravidade e o peso da aeronave. Ainda, este trabalho complementa os livros-texto da área de desempenho e serve como ferramenta de apoio aos docentes e aos alunos que almejam estudar a decolagem de uma aeronave a partir de um modelo mais completo.

Palavras-chave: Desempenho de aeronaves. Decolagem de aeronaves. Modelo numérico. Dinâmica do corpo rígido.

ABSTRACT

FERNANDES DE FIGUEIREDO, G. **Numerical study of takeoff of a three-degree-of-freedom aircraft model.** 2019. 57p. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Takeoff models widely presented in aircraft performance textbooks are described by analyzing the dynamics of a single material point (center of gravity). These models are limited and do not adequately predict aircraft translational and rotational accelerations. In this context, the present work sought to analyze the takeoff performance of an aircraft from a model with three degrees of freedom, numerically solving an initial value problem. The dynamics was described from a state space model, which was solved using the fourth order Runge-Kutta method. The code implementation was done in Python. We obtained a tool that allows us to analyze the takeoff of an aircraft by treating it as a rigid body with three degrees of freedom: horizontal and vertical translations and rotation (pitching). Also, thanks to the developed model, it is possible to study some important takeoff parameters, such as distance and takeoff time, as a function of variables such as the position of the aircraft's center of gravity and weight. Moreover, this work complements aircraft performance textbooks are described by analyzing the dynamics of a single material point (center of gravity). These model and serves as a support tool for teachers and students who want to study the takeoff of an aircraft from a more complete model.

Keywords: Aircraft performance. Aircraft takeoff. Numerical model. Rigid-body dynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Etapas da decolagem	26
Figura 2 – Distâncias e velocidades de decolagem	26
Figura 3 – Diagrama de corpo livre da aeronave	29
Figura 4 – Representação gráfica do método de Runge-Kutta de quarta ordem . .	35
Figura 5 – Fluxograma da implementação numérica	36
Figura 6 – Trajetória da aeronave durante decolagem	38
Figura 7 – Posição e velocidade segundo x	40
Figura 8 – Posição e velocidade segundo z	40
Figura 9 – Posição e velocidade segundo θ	41
Figura 10 – Evolução das forças aerodinâmicas verticais	42
Figura 11 – Evolução das forças aerodinâmicas horizontais	42
Figura 12 – Isolinhas de distância de decolagem	44
Figura 13 – Isolinhas de tempo de decolagem	44

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados do modelo da aeronave	37
Tabela 2 – Distância e tempo de decolagem	39

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AOA	Ângulo de Ataque
CG	Centro de Gravidade
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
FAA	<i>Federal Aviation Administration</i>
GDL	Grau de Liberdade
FAR	<i>Federal Aviation Regulations</i>
MTOW	<i>Maximum Take-off Wight</i>
PVI	<i>Problema de Valor Inicial</i>
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
USP	Universidade de São Paulo
USPSC	Campus USP de São Carlos

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Ângulo de ataque da asa
α_t	Ângulo de ataque do profundo
C_D	Coeficiente de arrasto
C_L	Coeficiente de sustentação
$C_{L_{tc}}$	Coeficiente de sustentação da empennagem durante subida
$C_{L_{tg}}$	Coeficiente de sustentação da empennagem durante corrida
$C_{L_{wc}}$	Coeficiente de sustentação da asa durante subida
$C_{L_{wg}}$	Coeficiente de sustentação da asa durante corrida
D_t	Arrasto do profundo
D_w	Arrasto da asa
ϵ	Ângulo de downwash
g	Aceleração da gravidade
γ	Ângulo entre a linha média da aeronave e o solo
I_{yy}	Momento de inércia de massa da aeronave segundo o eixo y
L_t	Força de sustentação do profundo
L_w	Força de sustentação da asa
N_M	Força normal no trem de pouso
N_N	Força normal na bequilha
T	Força de tração dos motores
μ	Coeficiente de atrito dinâmico entre a pista e as rodas da aeronave
W	Peso da aeronave
l_x^E	Distância horizontal do motor ao CG da aeronave
l_x^M	Distância horizontal do trem de pouso ao CG da aeronave

l_x^N	Distância horizontal da bequilha ao CG da aeronave
l_x^T	Distância horizontal do CP do profundo ao CG da aeronave
l_x^W	Distância horizontal do CP da asa ao CG da aeronave
l_z^E	Distância vertical do motor ao CG da aeronave
l_z^M	Distância vertical do trem de pouso ao CG da aeronave
l_z^N	Distância vertical da bequilha ao CG da aeronave
l_z^T	Distância vertical do CP do profundo ao CG da aeronave
l_z^W	Distância vertical do CP da asa ao CG da aeronave
T	Força de empuxo do grupo moto-propulsor
θ_{climb}	Ângulo de subida
ρ	Densidade do ar
V_2	Velocidade de subida
V_{LOF}	Velocidade de levantamento do solo
V_R	Velocidade de rotação
V_S	Velocidade de estol
V_{TR}	Velocidade de transição
X_t	Força resultante horizontal do profundo
X_w	Força resultante horizontal da asa
Z_t	Força resultante vertical do profundo
Z_w	Força resultante vertical da asa

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
2	MODELO DE DECOLAGEM	29
2.1	Modelo físico	29
2.1.1	Corrida	30
2.1.2	Transição	30
2.1.3	Subida	31
2.2	Abordagem numérica	32
3	RESULTADOS E DISCUSSÃO	37
3.1	Trajetória de decolagem	37
3.2	Evolução das variáveis de decolagem	39
3.3	Influência do CG	43
4	CONCLUSÃO	47
	REFERÊNCIAS	49
	ANEXOS	51
	ANEXO A – CÓDIGOS COMPUTACIONAIS	53
A.1	settings.py	53
A.2	aircraft.py	54
A.3	rk4.py	57

1 INTRODUÇÃO

A área de Desempenho é uma das mais importantes do projeto de uma aeronave, sobretudo do ponto de vista comercial, uma vez que as características de performance - velocidade de cruzeiro, alcance, autonomia, entre outros - e peso de carga paga são as especificações que mais interessam a um potencial operador (GUDMUNDSSON, 2014).

Assim, desde a fase inicial do projeto de uma aeronave, isto é, desde o projeto conceitual, os requisitos de desempenho são definidos e muitas das especificações do avião, tais como área de asa, potência requerida e peso, derivam desses requisitos (OHME, 2009).

Uma das fases mais importantes da análise de desempenho é a decolagem. Decolar uma aeronave é um procedimento que requer técnica e cautela, visto que se deve atender a requisitos de segurança estabelecidos pela autoridade aeronáutica competente e seguir uma sequência de etapas bem estabelecida, cada uma com velocidades e distâncias determinadas respectivamente nas seções 23.51 e 23.59 da FAR-23 (FAA, 2019). Esta estabelece:

Sec. 23.51 - Takeoff [speeds.]

[(a) For normal, utility, and acrobatic category airplanes, rotation speed, VR, is the speed at which the pilot makes a control input, with the intention of lifting the airplane out of contact with the runway or water surface.

(1) For multiengine landplanes, VR, must not be less than the greater of 1.05 VMC; or 1.10 VS;

(2) For single-engine landplanes, VR, must not be less than VS; and

(3) For seaplanes and amphibians taking off from water, VR, may be any speed that is shown to be safe under all reasonably expected conditions, including turbulence and complete failure of the critical engine. (b) For normal, utility, and acrobatic category airplanes, the speed at 50 feet above the takeoff surface level must not be less than:

(1) For multiengine airplanes, the highest of—

(i) A speed that is shown to be safe for continued flight (or emergency landing, if applicable) under all reasonable expected conditions, including turbulence and complete failure of the critical engine;

(ii) 1.10 VMC; or

(iii) 1.20 VS.

(2) For single-engine airplanes, the higher of—

(i) A speed that is shown to be safe under all reasonably expected conditions, including turbulence and complete engine failure; or

(ii) 1.20 VS.

(c) For commuter category airplanes, the following apply:

(1) *V₁* must be established in relation to VEF as follows:

(i) *VEF* is the calibrated airspeed at which the critical engine is assumed to fail. *VEF* must be selected by the applicant but must not be less than 1.05 VMC determined under Sec. 23.149(b) or, at the option of the applicant, not less than VMCG determined under Sec. 23.149(f)

(ii) *The takeoff decision speed, *V₁*, is the calibrated airspeed on the ground at which, as a result of engine failure or other reasons, the pilot is assumed to have made a decision to continue or discontinue the takeoff. The takeoff decision speed, *V₁*, must be selected by the applicant but must not be less than *VEF* plus the speed gained with the critical engine inoperative during the time interval between the instant at which the critical engine is failed and the instant at which the pilot recognizes and reacts to the engine failure, as indicated by the pilot's application of the first retarding means during the accelerate-stop determination of Sec. 23.55.*

(2) *The rotation speed, *VR*, in terms of calibrated airspeed, must be selected by the applicant and must not be less than the greatest of the following:*

(i) *V₁*;

(ii) *1.05 VMC determined under Sec. 23.149(b)*;

(iii) *1.10 VS; or*

(iv) *The speed that allows attaining the initial climb-out speed, *V₂*, before reaching a height of 35 feet above the takeoff surface in accordance with Sec. 23.57(c)(2).*

(3) *For any given set of conditions, such as weight, altitude, temperature, and configuration, a single value of *VR* must be used to show compliance with both the one-engine- inoperative takeoff and all-engines-operating takeoff requirements.*

(4) *The takeoff safety speed, *V₂*, in terms of calibrated airspeed, must be selected by the applicant so as to allow the gradient of climb required in Sec. 23.67(c)(1) and (c)(2) but must not be less than 1.10 VMC or less than 1.20 VS.*

(5) *The one-engine-inoperative takeoff distance, using a normal rotation rate at a speed 5 knots less than *VR*, established in accordance with paragraph (c)(2) of this section, must be shown not to exceed the corresponding one-engine- inoperative takeoff distance,*

determined in accordance with Sec. 23.57 and Sec. 23.59(a)(1), using the established VR. The takeoff, otherwise performed in accordance with Sec. 23.57, must be continued safely from the point at which the airplane is 35 feet above the takeoff surface and at a speed not less than the established V2 minus 5 knots.

(6) The applicant must show, with all engines operating, that marked increases in the scheduled takeoff distances, determined in accordance with Sec. 23.59(a)(2), do not result from over-rotation of the airplane or out-of-trim conditions.]

Sec. 23.59 - Takeoff distance and takeoff run.

[For each commuter category airplane, the takeoff distance and, at the option of the applicant, the takeoff run, must be determined.]

(a) Takeoff distance is the greater of—

(1) The horizontal distance along the takeoff path from the start of the takeoff to the point at which the airplane is 35 feet above the takeoff surface as determined under Sec. 23.57; or

[(2) With all engines operating, 115 percent of the horizontal distance from the start of the takeoff to the point at which the airplane is 35 feet above the takeoff surface, determined by a procedure consistent with Sec. 23.57.

(b) If the takeoff distance includes a clearway, the takeoff run is the greater of—

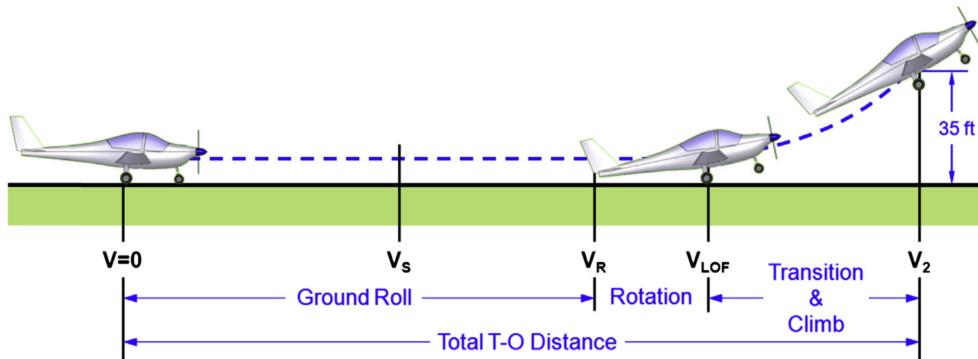
(1) The horizontal distance along the takeoff path from the start of the takeoff to a point equidistant between the liftoff point and the point at which the airplane is 35 feet above the takeoff surface as determined under Sec. 23.57; or

(2) With all engines operating, 115 percent of the horizontal distance from the start of the takeoff to a point equidistant between the liftoff point and the point at which the airplane is 35 feet above the takeoff surface, determined by a procedure consistent with Sec. 23.57.]

A Figura 1 e a Figura 2 detalham as etapas compreendidas na decolagem e as distâncias e velocidades associadas a cada trecho, respectivamente, conforme estabelecido nas seções acima da FAR-23 (FAA, 2019). O procedimento se inicia com a aeronave em repouso, na cabeceira da pista. Quando esta recebe autorização da torre de controle, inicia-se a fase de **corrida ou aceleração** (*ground roll*, em inglês), na qual o avião libera os freios e acelera até atingir a velocidade de rotação V_R , determinada por requisito como 1.1 da velocidade de estol V_S . A partir daí, tem início a etapa de **rotação** (*rotation*, em inglês), quando o piloto puxa o manche, a fim de levantar o nariz da aeronave e aumentar o ângulo de ataque do avião. Geralmente, estima-se que a rotação dura de 1 a 3 segundos,

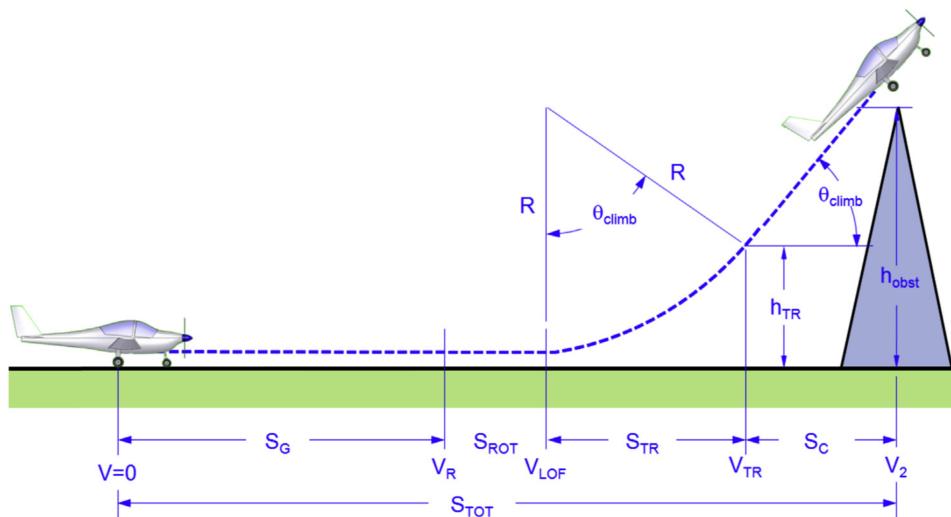
a depender do tamanho da aeronave. Ao final, a velocidade é praticamente igual à V_R , de modo que $V_{LOF} = V_R = 1.1V_S$. Essa fase se encerra a partir do momento em que há perda de contato com o solo e começa então o segmento de **transição** (*transition*, em inglês). Neste, rotaciona-se até que se atinja o ângulo de subida θ_{climb} satisfatório.

Figura 1: Etapas da decolagem.



Fonte: ([GUDMUNDSSON, 2014](#))

Figura 2: Distâncias e velocidades de decolagem.



Fonte: ([GUDMUNDSSON, 2014](#))

Por fim, o avião inicia uma trajetória retilínea com ângulo constante até atingir a altura de 35 ft (requisito de certificação para a FAR-23) ou 50 ft (FAR-25) a velocidade V_2 , que é aproximadamente 1.2 da velocidade de estol. Vale destacar que as alturas establecidas são tomadas como a distância vertical mínima para superar um eventual obstáculo que

interfira na trajetória da aeronave. Essa etapa é chamada de **subida** (ou *climb*, em inglês), e é a última fase da decolagem (GUDMUNDSSON, 2014; RAYMER, 1992).

Conforme apresentam (ZAMMIT-MANGION; ESHELBY, 2008), o monitoramento em tempo real das velocidades e acelerações experimentadas pela aeronave não é trivial, visto que durante a decolagem o avião encontra-se em regime não-estacionário e vários parâmetros estão em constante alteração: peso, força de tração, coeficiente de sustentação, etc. Entretanto, apesar da dificuldade inerente, é de suma importância prever e controlar os parâmetros envolvidos na etapa de decolagem, haja vista os inúmeros acidentes relacionados à má determinação das acelerações da aeronave.

Nesse sentido, faz-se necessário o desenvolvimento de modelos aproximados, especificamente computacionais, que possa satisfatoriamente simular a dinâmica do avião durante a decolagem. A maioria dos livros-texto das áreas de Desempenho e Dinâmica de Voo apresentam soluções consideravelmente simples, que tratam a aeronave como um ponto material e que resolvem as equações de movimento a partir de esquemas aproximados de integração numérica.

O objetivo deste TCC é construir um modelo mais completo, tratando a aeronave como um corpo rígido com três graus de liberdade, de modo a permitir, principalmente, levar em consideração o CG do avião.

2 MODELO DE DECOLAGEM

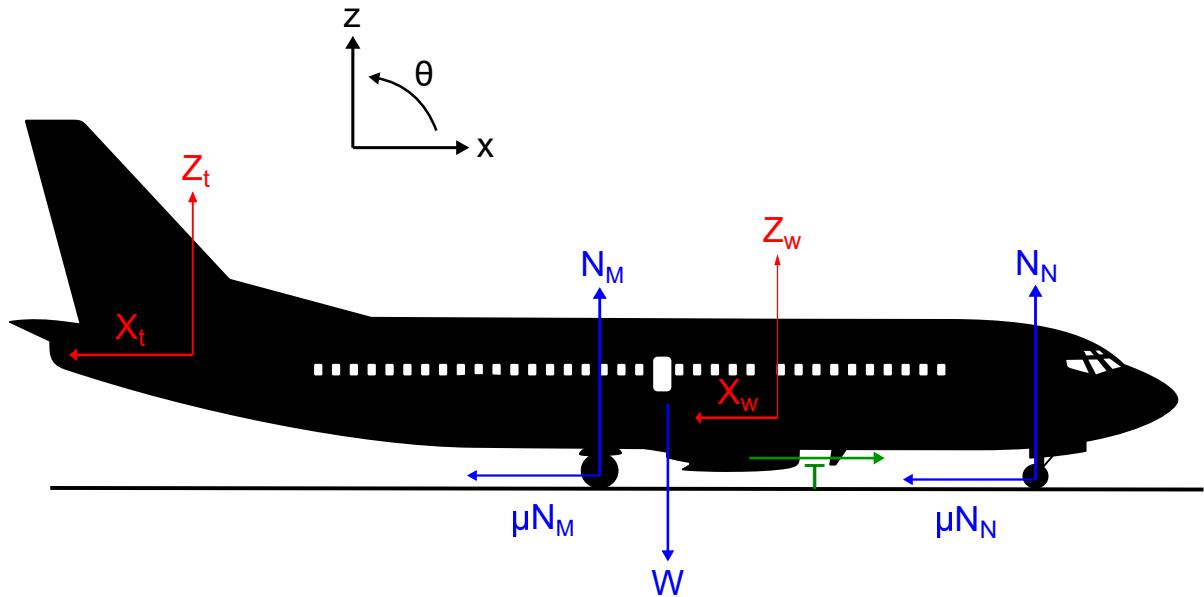
Neste capítulo, apresenta-se a modelagem do problema e a metodologia empregada para a resolução do mesmo. Na seção 2.1, são mostradas as equações de dinâmica que descrevem o movimento da aeronave e a sua tradução para o espaço de estados, bem como todas as considerações de desempenho, dinâmica e aerodinâmica adotadas. Na seção 2.2, mostra-se a abordagem numérica implementada para a resolução do problema descrito.

2.1 Modelo físico

Um avião é um corpo rígido com seis GDL, um movimento translacional e um movimento rotacional por eixo. Neste projeto, optou-se por um modelo reduzido com apenas três GDL: deslocamento horizontal, no sentido da pista, deslocamento vertical e arfagem. Assim, o primeiro passo foi descrever matematicamente o modelo a partir das equações de dinâmica do corpo rígido.

Para isso, desenhou-se o diagrama de corpo livre da aeronave, que é apresentado na Figura 3.

Figura 3: Diagrama de corpo livre da aeronave.



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

A partir do diagrama de corpo livre da aeronave, é possível escrever as equações que

regem o movimento da aeronave. Cabe aqui uma divisão para cada etapa da decolagem, visto que diferentes condições de contorno se aplicam a cada fase. O segmento de rotação foi desconsiderado no modelo, dada sua transiência e curta duração, restando assim as etapas de corrida, transição e subida.

As equações que descrevem o movimento da aeronave durante a decolagem são apresentadas a seguir.

2.1.1 Corrida

Nesta etapa, a aeronave está em contato com o solo através da bequilha e do trem de pouso principal. Sua única aceleração é segundo o eixo x , estando em equilíbrio em relação aos outros dois.

$$T - X_w - X_t - \mu(N_N + N_M) - W \sin \gamma = \frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.1)$$

$$N_N + N_M + Z_w + Z_t - W \cos \gamma = 0 \quad (2.2)$$

$$N_N l_x^N - \mu N_N l_z^N + T l_z^E + Z_w l_x^W + X_w l_z^W - N_M l_x^M - \mu N_M l_z^M - Z_t l_x^T + X_t l_z^T = 0 \quad (2.3)$$

2.1.2 Transição

Nesta fase, o avião já perdeu contato com o solo e tem acelerações segundo os três eixos. O piloto rotaciona a aeronave no sentido de atingir o ângulo de subida que lhe permitirá atingir a altura de obstáculo com a velocidade de subida V_2 estabelecida pela FAR.

$$T - X_w - X_t - W \sin \gamma = \frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.4)$$

$$Z_w + Z_t - W \cos \gamma = \frac{W}{g} \frac{d^2z}{dt^2} \quad (2.5)$$

$$T l_z^E + Z_w l_x^W + X_w l_z^W - Z_t l_x^T + X_t l_z^T = I_{yy} \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.6)$$

2.1.3 Subida

Esta é a última etapa da decolagem. A aeronave inicia movimento de subida para tomar altitude, a ângulo constante. Conforme estabelece a Parte 23 da FAR, Subparte B, Seção Performance, o avião deve atingir 35 ft a velocidade V_2 (FAA, 2019).

$$T - X_w - X_t - W \sin \gamma = \frac{W}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (2.7)$$

$$Z_w + Z_t - W \cos \gamma = \frac{W}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (2.8)$$

$$T l_z^E + Z_w l_x^W + X_w l_z^W - Z_t l_x^T + X_t l_z^T = 0 \quad (2.9)$$

É importante destacar que, a fim de manter como referência os eixos $x-z$ como sendo sempre o eixo paralelo e o eixo ortogonal ao eixo longitudinal da aeronave respectivamente, foi preciso reescrever as forças aerodinâmicas do sistema de coordenadas local, no qual a sustentação é ortogonal à velocidade, para o sistema global $x-z$. Tal projeção foi realizada tanto para a asa quanto para a empenagem horizontal. O sistema de equações que descreve a rotação realizada é apresentado da Equação 2.10 à Equação 2.13.

$$X_w = -L_w \sin(\alpha) + D_w \cos(\alpha) \quad (2.10)$$

$$Z_w = L_w \cos(\alpha) + D_w \sin(\alpha) \quad (2.11)$$

$$X_t = -L_t \sin(\alpha - \epsilon) + D_t \cos(\alpha - \epsilon) \quad (2.12)$$

$$Z_t = L_t \cos(\alpha - \epsilon) + D_t \sin(\alpha - \epsilon) \quad (2.13)$$

Destaca-se que a sustentação e o arrasto foram tomados a partir do centro de pressão, de modo que o momento de arfagem fosse assim nulo, simplificando o problema. Ainda, o ângulo de *downwash* da empenagem é dado por:

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{d\epsilon}{d\alpha} \alpha \quad (2.14)$$

Como o objetivo é a resolução das equações de movimento numericamente, faz-se interessante a representação dessas no espaço de estados. A representação no espaço de

estados é um modelo matemático de um sistema físico como um conjunto de variáveis de entrada, saída e estado relacionadas entre si por equações diferenciais de primeira ordem ou equações de diferenças finitas. Nessa representação, o estado do sistema pode ser representado como um vetor dentro desse espaço.

No caso do projeto desenvolvido neste trabalho, o vetor de interesse \underline{u} é o vetor da posição e da velocidade de cada um dos graus de liberdade, isto é:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

Recorrendo às Equações de 2.1 a 2.9, é possível determinar numericamente as acelerações de cada etapa da decolagem, como será detalhado na seção a seguir.

2.2 Abordagem numérica

Um problema de valor inicial (PVI), ou problema de Cauchy, é um problema matemático constituído de uma equação diferencial e uma condição inicial (BOYCE; DIPRIMA, 2015). Pode-se escrevê-lo como:

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Tal tipo de problema é recorrente em modelos físicos em Ciências e Engenharia, uma vez que descrevem a evolução temporal de determinada variável, a partir de uma condição inicial dada. O modelo físico desenvolvido na seção anterior é um exemplo de PVI, constituído não por uma equação, mas por uma família de equações diferenciais. Tomando como exemplo a etapa de corrida, tem-se:

$$\underline{u}'(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ g/W(T - X_w - X_t - W \sin \gamma) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

$$\underline{u}(0) = \underline{0} \quad (2.18)$$

Verifica-se assim a importância do tratamento feito no modelo físico para escrever o problema no espaço de estados.

Tradicionalmente, faz-se uso de métodos explícitos, tais como o método de Euler, para resolver problemas de valor inicial. Nessa aproximação, a saída $y(t)$ é aproximada como:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n), \quad (2.19)$$

em que n é o índice do passo atual e h é o tamanho do passo. Embora o método de Euler possa oferecer aproximações razoáveis, sua grande limitação reside no fato de ser um esquema de primeira ordem, o que prejudica a precisão da solução aproximada. Daí, surge uma classe de métodos amplamente utilizada para a resolução de PVI's que são os métodos de Runge-Kutta, em especial o de quarta ordem, que é utilizado neste projeto.

Analiticamente, a resolução da [Equação 2.16](#) é dada pela integração da função-objetivo, isto é:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (2.20)$$

O método de Euler é assim uma aproximação de primeira ordem do valor da integral utilizando o valor de $f(t, y(t))$ em $t = t_n$. O método de Runge-Kutta, por sua vez, insere estágios intermediários (ou incrementos) dentro do intervalo $[t_n, t_{n+1}]$, buscando aumentar a ordem de aproximação da integral ([BUTCHER, 2008](#)).

O método de Runge-Kutta de quarta ordem especificamente, que foi implementado neste trabalho, é descrito pela seguinte equação:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.21)$$

com os incrementos k calculados como:

$$k_1 = h f(t_n, y_n), \quad (2.22)$$

$$k_2 = h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \quad (2.23)$$

$$k_3 = h f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), \quad (2.24)$$

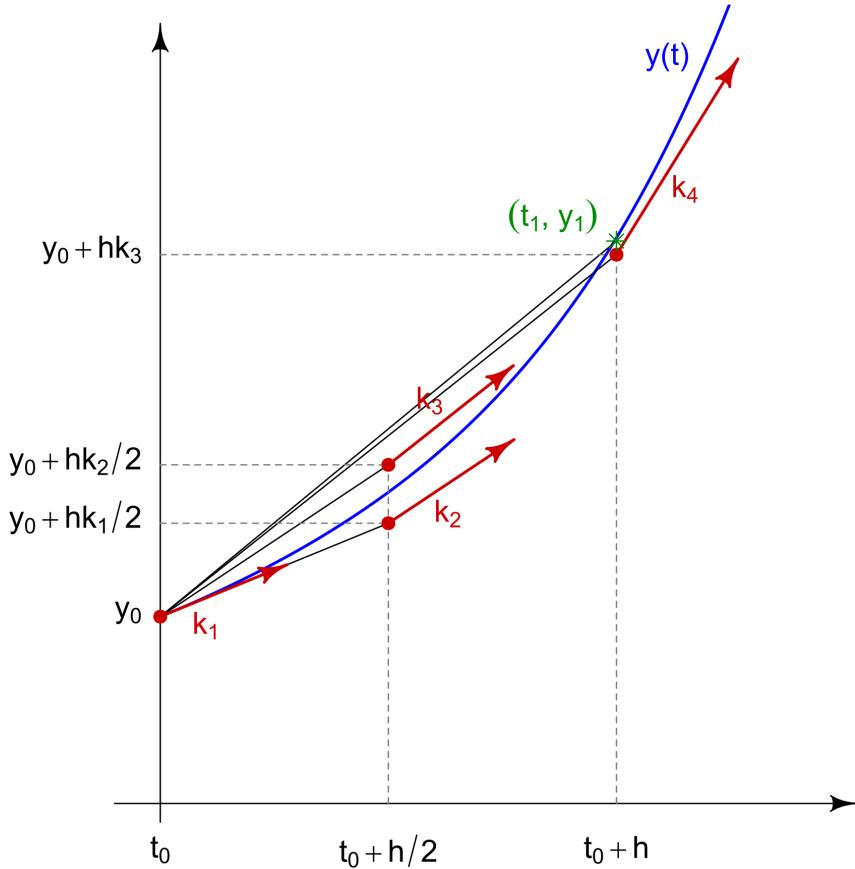
$$k_4 = h f(t_n + h, y_n + k_3). \quad (2.25)$$

Ou seja, no método de Runge-Kutta de quarta de ordem, a aproximação y_{n+1} é determinada pelo valor do passo atual y_n mais a média ponderada de quatro incrementos, sendo cada incremento o produto do tamanho do intervalo e a inclinação estimada da curva especificada pela função objetivo na equação diferencial. Tem-se que:

- k_1 é o incremento baseado na inclinação no início do intervalo, usando y ;
- k_2 é o incremento baseado na inclinação no ponto médio do intervalo, usando y e k_1 ;
- k_3 é o incremento baseado na inclinação no ponto médio do intervalo, usando y e k_2 ;
- k_4 é o incremento baseado na inclinação no final do intervalo, usando y e k_3 .

A [Figura 4](#) explicita graficamente o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Figura 4: Método de Runge-Kutta de quarta ordem apresentado graficamente, com curvas e pontos utilizados na aproximação.



Fonte: Imagem disponível publicamente *online*.

Finalmente, completando a modelagem numérica do problema de decolagem, a última etapa foi a implementação dos códigos computacionais. Todo o desenvolvimento deste trabalho foi feito em Python e os arquivos foram carregados para um projeto público no GitHub.

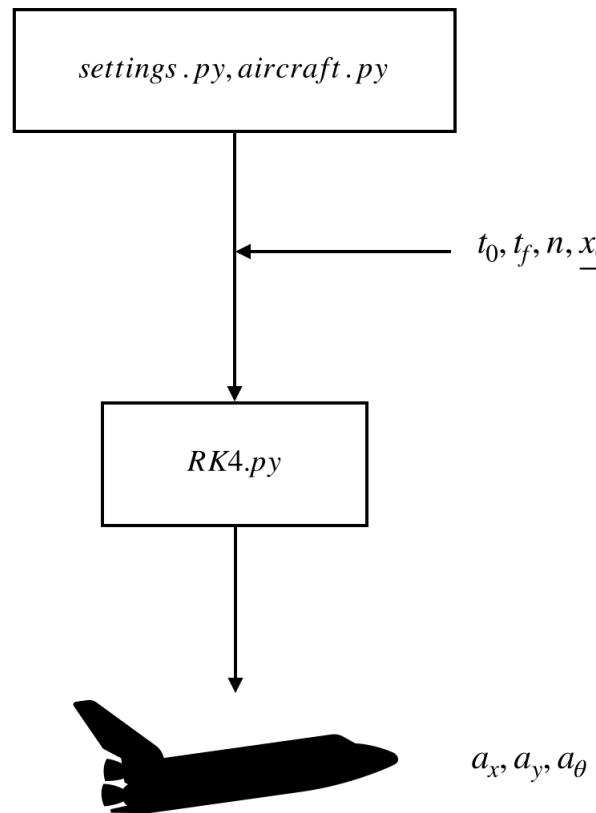
Quatro códigos foram desenvolvidos ao total. O módulo *settings.py* contém todos os parâmetros do problema, como MTOW, área de asa, coeficiente de atrito entre o pneu e a pista, densidade do ar, etc. Já o módulo *aircraft.py* contém todas as funções descritivas da aeronave, isto é, função para cálculo do empuxo, função para cálculo do ângulo de *downwash*, e, principalmente, as funções de cada etapa da decolagem, que contêm as equações de movimento da aeronave.

Essas duas funções, mais as condições iniciais e os parâmetros da simulação (número de passos, tamanho do passo, etc.) são passadas como *input* para a função *RK4.py*, que

resolve as equações de movimento tratando-as como um PVI e resolvendo-as através do método de Runge-Kutta de quarta ordem. Por fim, os resultados são retornados e é possível realizar a plotagem dos gráficos de interesse deste trabalho.

O fluxograma da [Figura 5](#) detalha o funcionamento da estrutura dos códigos.

Figura 5: Fluxograma da implementação numérica.



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

Vale destacar que todas as funções são chamadas dentro de uma única função principal denominada *main.py*.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos no trabalho. Na primeira metade, composta das seções 3.1 e 3.2, mostra-se a trajetória da aeronave e a evolução das variáveis de interesse da decolagem. Almeja-se assim não só validar o modelo desenvolvido, como também explorar as vantagens de uma modelagem mais completa, que trata a aeronave como um corpo rígido com três graus de liberdade. Na sequência, faz-se variar a posição do CG e estuda-se o impacto deste sobre a decolagem, principalmente no que tange ao tempo e à distância necessária para decolar a aeronave. Esses resultados são apresentados na seção 3.3.

3.1 Trajetória de decolagem

Para o desenvolvimento do modelo numérico de decolagem, fez-se necessária a escolha de alguns parâmetros, tais como MTOW, empuxo, entre outros. A Tabela 1 resume os valores adotados.

Tabela 1: Dados do modelo da aeronave.

Parâmetro	Valor
ρ	1.225 kg/m ³
g	9.81 m/s ²
MTOW	6120 kg
S	20 m ²
μ	0.03
I_{yy}	25480 kgm ²
C_{Lwg}	1.2
C_{Ltg}	0.3
C_{Lwc}	1.35
C_{Ltc}	0.35
C_{D0}	0.0431
k	0.08
V_S	44 m/s
l_x^E	0.85 m
l_x^W	0.8 m
l_z^W	0 m
l_x^M	0 m
l_z^M	0.5 m
l_x^T	6 m
l_z^T	4.35 m
ϵ_0	0.08
$d\epsilon/d\alpha$	0.35
T_0	26200 N

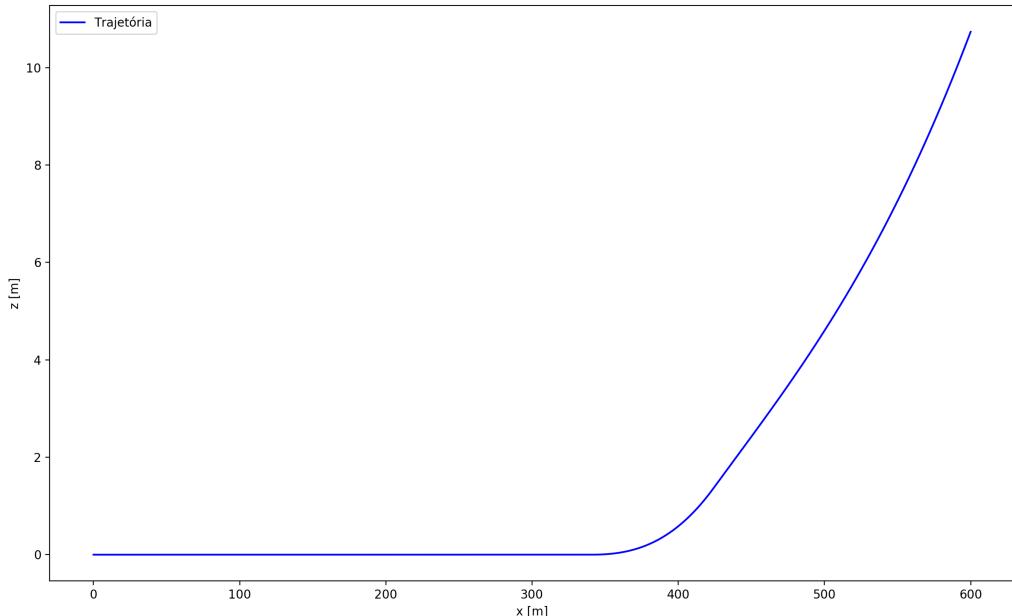
Fonte: Elaborada pelo autor.

Os dados referentes à aeronave, de geometria, aerodinâmica e inércia foram retirados do Apêndice B de ([ROSKAM, 2018](#)) enquanto os de estabilidade e controle foram extraídos de ([ETKIN; REID, 1995](#)). O coeficiente de atrito dinâmico entre a pista e os pneus da aeronave veio da tabela 17-3 de ([GUDMUNDSSON, 2014](#)).

Destacam-se aqui algumas das considerações assumidas. Os valores dos coeficientes de sustentação da asa e da empennagem foram aproximados, já que estes são função tanto do ângulo de ataque quanto do número de Reynolds. Como a velocidade varia durante a decolagem, também variam os coeficientes de sustentação. Como simplificação, adotou-se $C_{L_{wg}} = 0.8C_{L_{máx}}$ e $C_{L_{wc}} = 0.9C_{L_{máx}}$. Para a empennagem vertical, os valores foram determinados a partir da razão entre as áreas, obtendo-se a relação de 1 para 4. O parâmetro $\frac{d\epsilon}{d\alpha}$ foi calculado segundo o Apêndice B.5 de ([ETKIN; REID, 1995](#)). Já os valores dos braços foram determinados assumindo, em um primeiro momento, que o CG da aeronave estava localizado na mesma coordenada x que o trem de pouso principal (posição traseira limite), na mesma coordenada z da asa.

De posse desses valores, foi possível alimentar o modelo numérico e obter os primeiros resultados. A [Figura 6](#) mostra a trajetória do avião durante a decolagem.

Figura 6: Trajetória da aeronave durante a decolagem.



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

Da figura, é possível ver claramente as 3 etapas que constituem a decolagem. Em uma primeira fase, o deslocamento é puramente horizontal, segundo o eixo x. Essa é a corrida, na qual a aeronave é acelerada até que se atinga V_R . Na sequência, ela inicia uma trajetória curvilínea, ganhando altitude e inclinação suficiente até atingir o ângulo de subida desejado. Por fim, após concluir a etapa de rolagem, a aeronave inicia a subida a ângulo constante. Ela continua a tomar altitude até chegar a altura de 35 ft (aproximadamente 10.7 m), a partir da qual a decolagem é considerada concluída.

Dadas essas considerações, pode-se concluir que o código implementado obteve sucesso. Os valores de tempo e distância de decolagem obtidos são exibidos na [Tabela 2](#).

Tabela 2: Distância e tempo de decolagem.

Parâmetro	Valor
Distância de decolagem	600.0 m
Tempo de decolagem	18.2 s

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tais valores são coerentes com a realidade e representam uma boa aproximação do problema real.

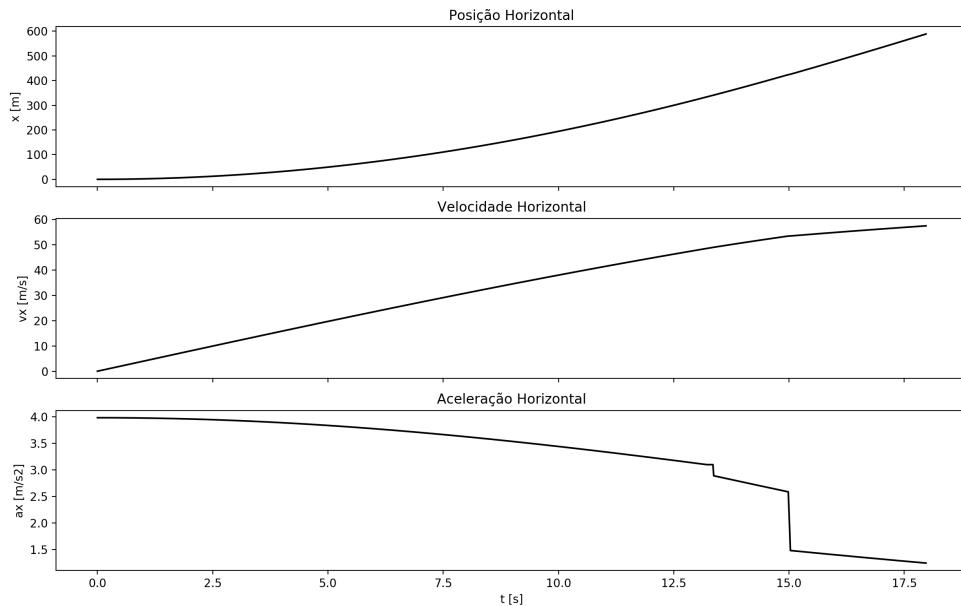
3.2 Evolução das variáveis de decolagem

Uma vez validados o modelo numérico e os resultados gerados pelo código, mostra-se interessante analisar a evolução temporal das principais variáveis de decolagem, variável a variável. As figuras a seguir exibem respectivamente a evolução da posição, velocidade e aceleração, das forças aerodinâmicas verticais, e das forças aerodinâmicas horizontais.

Da [Figura 7](#), nota-se que o deslocamento e a velocidade da aeronave evoluem aproximadamente segundo o mesmo perfil ao longo de todo o percurso. Tal resultado era esperado, dado que a aceleração horizontal é descrita por uma fórmula que se mantém quase a mesma durante toda a trajetória, a despeito apenas do aumento de ângulo de ataque e da perda de contato com o solo.

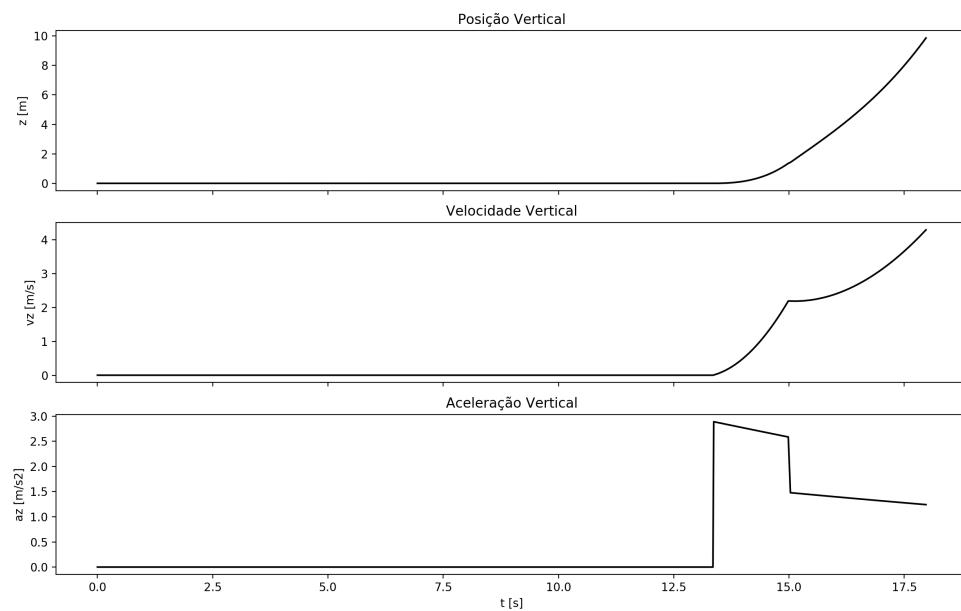
Vale destacar as discontinuidades observadas na evolução temporal da aceleração, que derivam de simplificações adotadas no modelo. A primeira, que ocorre no instante de tempo $t = 13.5$ s, é devida à não-consideração da etapa de rolagem. Efetivamente, como discutido na introdução deste trabalho, existe uma fase intermediária entre a corrida e a transição, na qual o piloto levanta o nariz da aeronave até que se perca o contato com o solo. Neste movimento, a força normal atuante no trem de pouso principal diminui gradativamente até se tornar nula. Como essa etapa foi desprezada, a aceleração segundo o eixo x passa abruptamente da [Equação 2.1](#) à [Equação 2.4](#).

Figura 7: Posição e velocidade segundo x .



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

Figura 8: Posição e velocidade segundo z .

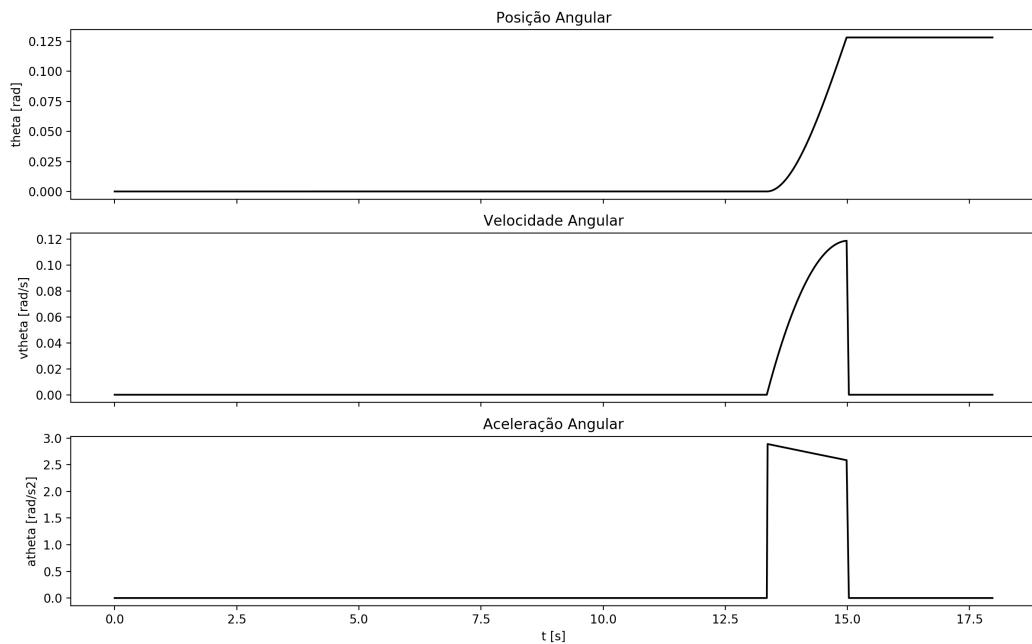


Fonte: Desenvolvida pelo autor.

A segunda discontinuidade observada se dá aproximadamente no instante de tempo $t = 15$ s, na passagem da transição para a subida. Ela se deve à atualização do ângulo entre a linha média da aeronave e a pista, γ . De fato, durante a fase de transição, vale a relação $\gamma = \theta$, e à medida que a aeronave ganha inclinação, γ deve ser atualizado. Entretanto, por simplificação, vista a curta duração dessa etapa, toma-se $\gamma = 0$ durante toda a transição e, ao iniciar a subida, atualiza-se o valor para o ângulo de subida. Essa mudança abrupta causa a discontinuidade observada.

Na [Figura 8](#), na qual são mostradas a posição, a velocidade e a aceleração verticais, destaca-se a primeira etapa da decolagem, a corrida. Pode-se perceber que todas as grandezas permanecem nulas até que se inicie a fase de transição. Também se destaca a abrupta mudança na derivada da curva de velocidade (isto é, a aceleração) no instante $t = 15$ s, que também é explicada pela não-atualização incremental do ângulo γ .

Figura 9: Posição e velocidade segundo θ .

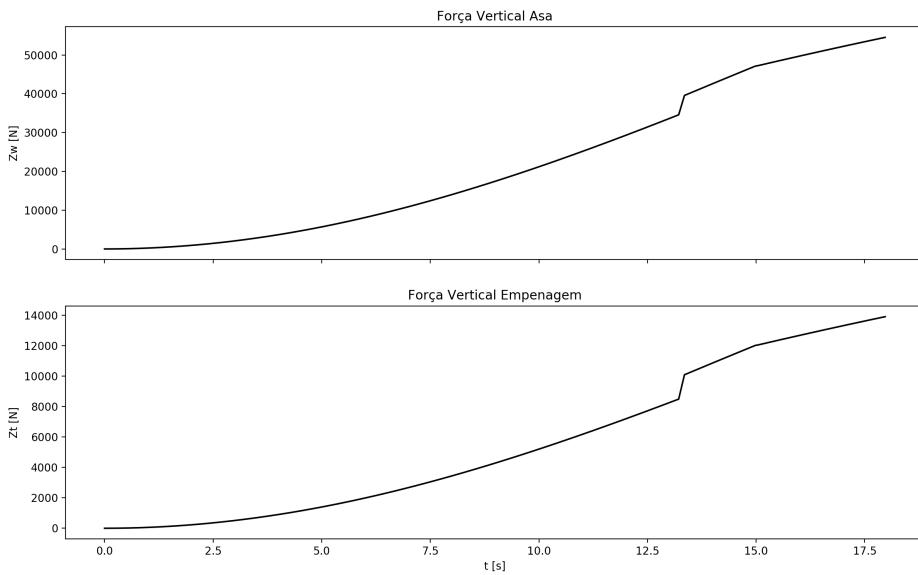


Fonte: Desenvolvida pelo autor.

Na [Figura 9](#) é apresentada a evolução da cinemática angular da aeronave. Na corrida, todas as grandezas são nulas, uma vez que só existe aceleração segundo o eixo x . Inicia-se então a transição e aeronave começa a aumentar sua inclinação até que chegue ao ângulo de subida. Daí em diante, aceleração e velocidade voltam a zero, enquanto a

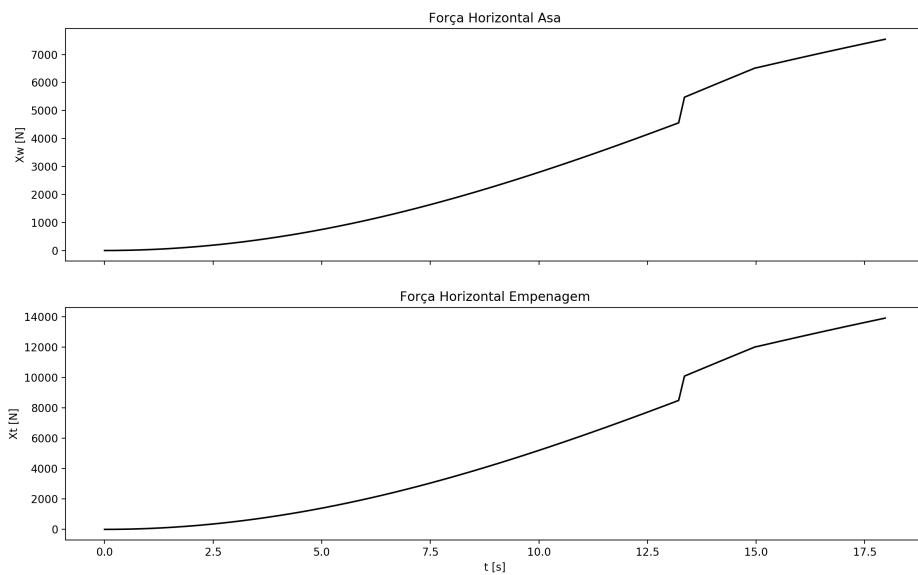
posição angular permanece constante e igual ao ângulo de subida até o fim da decolagem.

Figura 10: Evolução das forças aerodinâmicas verticais.



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

Figura 11: Evolução das forças aerodinâmicas horizontais.



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

Por fim, tem-se a evolução das forças aerodinâmicas atuantes na aeronave. Destacam-se dois pontos: o perfil sempre crescente das cargas e as curvas semelhantes entre si. O primeiro é facilmente explicado pela equação das forças de arrasto e sustentação, dadas por:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_L \quad (3.1)$$

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \quad (3.2)$$

Como a velocidade aumenta ao longo de todas as três fases da decolagem, também aumentam as forças aerodinâmicas atuantes.

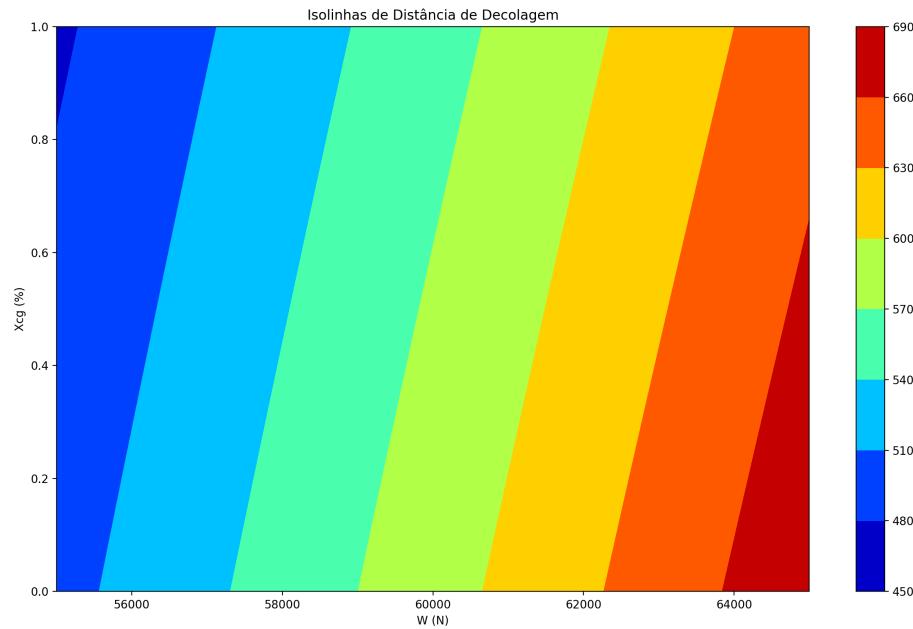
O segundo ponto também é explicado pelas equações 3.1 e 3.2. A expressão para o cálculo da sustentação é também a mesma para o cálculo do arrasto, a despeito do coeficiente, o que acarreta apenas uma mudança no módulo da força. Ainda, não há diferença entre a força atuante na asa e na empennagem, sendo esta inferior àquela pela razão entre as áreas destacada anteriormente.

3.3 Influência do CG

Uma das grandes vantagens deste trabalho, além de permitir estudar separadamente cada grau de liberdade, é o fato de que o modelo numérico não é apenas um ponto material, e sim um corpo rígido. Desse modo, as acelerações são calculadas para o CG da aeronave e pode-se variar a sua posição de modo a analisar a influência deste sobre o desempenho em decolagem. Além disso, também é possível variar o peso da aeronave e rodar o modelo para verificar o impacto que este tem sobre a distância e o tempo de decolagem.

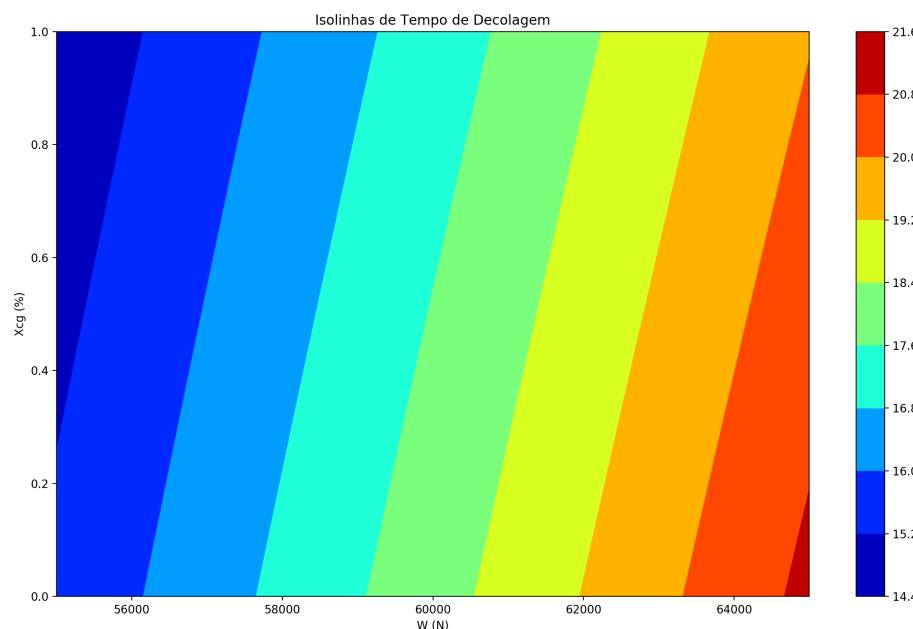
Assim, fez-se variar a posição x do CG desde o limite traseiro (coordenada do trem de pouso principal) até o limite dianteiro (coordenada da bequilha), atribuindo o valor de 100% a este e 0% àquele. Já para o peso de decolagem, foram feitas simulações para o intervalo de $[MTOW \pm 5000N]$. O resultado são as isolinhas de decolagem, isto é, as combinações de peso e posição do CG que retornam a mesma distância/tempo de decolagem. A Figura 12 exibe o resultado graficamente para as distâncias, enquanto a Figura 13 exibe o resultado para o tempo de decolagem.

Figura 12: Isolinhas de distância de decolagem.



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

Figura 13: Isolinhas de tempo de decolagem.



Fonte: Desenvolvida pelo autor.

A partir das isolinhas de decolagem, pode-se tirar algumas conclusões.

Primeiramente, nota-se de modo isolado as contribuições do peso e da posição do CG. Pode-se verificar que quanto mais pesada a aeronave, maior a distância necessária para a decolagem e, consequentemente, maior também o tempo. Tal comportamento está perfeitamente alinhado com a teoria: quanto mais leve o avião, menor a força de sustentação necessária para levantá-lo do chão e "vencer" a gravidade. Quanto menor a força de sustentação, menor a velocidade necessária e, consequentemente, menor a distância a percorrer para atingi-la.

Quanto à posição do CG, nota-se que quanto mais dianteiro menores a distância e o tempo de decolagem, embora o impacto seja menor que o do peso. De fato, fixando uma linha de W constante e outra de X_{CG} constante, pode-se verificar que o intervalo de pesos para uma mesma posição de CG é maior que o intervalo de posições de CG para um mesmo peso. Tal comportamento também encontra explicação teórica: a posição do CG impacta unicamente nas equações de momento, que por sua vez só têm relevância durante a fase de transição, enquanto o peso da aeronave está presente em todas as equações translacionais, de todas as etapas.

Dessa forma, as maiores distâncias e tempos de decolagem estão associadas às configurações de CG mais traseiro e aeronave mais pesada, tendo como valor limite para o intervalo analisado os valores de $690m$ e $21.6s$. No outro extremo, tem-se uma distância de $450m$ e um tempo de $14.4s$ para a configuração mais leve e de CG mais dianteiro testada. Vale destacar, entretanto, que a relação entre CG mais dianteiro e menos distância/tempo de decolagem foi verificada para a **configuração desta aeronave**. Tal resultado é bastante sensível aos parâmetros geométricos e aerodinâmicos do avião, necessitando maior investigação para generalização.

Por fim, destaca-se a relação quase linear que existe entre as isolinhas e as variáveis peso e posição do CG. Efetivamente, como mostram as equações de dinâmica, as acelerações estão relacionadas linearmente com o peso e os braços de momento, de modo que o resultado obtido é coerente com o modelo físico elaborado.

4 CONCLUSÃO

Em conclusão, este trabalho procurou analisar o desempenho em decolagem de uma aeronave, a partir de uma abordagem mais completa do que a disponível nos livros-texto da área. Geralmente, o avião é tratado como um ponto material e os métodos numéricos empregados para a integração das acelerações experimentadas são aproximações de primeira ordem ou simplesmente médias baseadas em valores típicos de velocidade e tempo de decolagem.

O modelo físico desenvolvido neste TCC tratou a aeronave como um corpo rígido com três graus de liberdade: translação horizontal, translação vertical e arfagem. O modelo numérico, por sua vez, se valeu do método de Runge-Kutta de quarta ordem para obter resultados mais precisos para a velocidade e a posição da aeronave para cada trecho. Tais abordagens proporcionaram um estudo mais completo do desempenho em decolagem, permitindo analisar a evolução de cada grau de liberdade separadamente e a influência do CG e do peso da aeronave, donde se concluiu que para uma decolagem em menor distância e menor tempo, faz-se necessário uma aeronave mais leve e com CG mais dianteiro, para a configuração do avião deste projeto. Esses resultados não são possíveis com a abordagem clássica, a partir de um único ponto material, de modo que este trabalho contribui para o enriquecimento da área de Desempenho de Aeronaves.

Como evolução ao trabalho, alguns pontos podem ser levantados. Em especial, destacam-se quatro pontos: tratamento do consumo de combustível, consideração do número de Reynolds, tratamento das discontinuidades e modificação da função de empuxo disponível. O tratamento do consumo de combustível se refere à modelagem do peso da aeronave como função do peso de combustível que é consumido durante a decolagem. No trabalho, o peso foi assumido constante durante todo o procedimento. Da mesma forma, pode-se modificar a equação de empuxo do motor, de modo a considerar a influência das velocidades sobre o empuxo disponível. Já o tratamento das discontinuidades e a consideração do número de Reynolds passariam pela inclusão da etapa de rolagem, atualização incremental do ângulo γ durante a transição e cálculo implícito dos coeficientes de sustentação, como função da velocidade a cada passo de tempo. Ainda, uma evolução natural deste trabalho, é a inclusão do eixo lateral da aeronave, passando de um modelo com três graus de liberdade para um com seis.

Considera-se, entretanto, que os pontos levantados são eixos de melhoria, de modo que os resultados apresentados são satisfatórios e representam uma boa evolução comparado ao que existe nos livros-texto da área de Desempenho de Aeronaves.

REFERÊNCIAS

- BOYCE, W.; DIPRIMA, R. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** [S.l.]: LTC, 2015.
- BUTCHER, J. C. **Numerical methods for ordinary differential equations.** [S.l.]: John Wiley Sons Ltd., 2008.
- ETKIN, B.; REID, L. D. **Dynamics of flight: stability and control.** [S.l.]: John Wiley Sons Inc., 1995.
- FAA. **Federal Aviation Regulations Part 23 - Airworthiness standards : normal, utility, acrobatic and commuter category airplanes.** [S.l.: s.n.], 2019.
- GUDMUNDSSON, S. **General aviation aircraft design: applied methods and procedures.** [S.l.]: Elsevier Inc., 2014.
- OHME, P. A model-based approach to aircraft takeoff and landing performance assessment. **American Institute of Aeronautics and Astronautics**, 2009.
- RAYMER, D. **Aircraft design: a conceptual approach.** [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1992.
- ROSKAM, J. **Airplane flight dynamics and automatic flight controls: Part I.** [S.l.]: DARcorporation, 2018.
- ZAMMIT-MANGION, D.; ESHELBY, M. Simplified algorithm to model aircraft acceleration during takeoff. **Journal of Aircraft**, v. 45, n. 4, 2008.

Anexos

ANEXO A – CÓDIGOS COMPUTACIONAIS

Apresentam-se neste apêndice os códigos computacionais desenvolvidos em Python, a saber:

settings.py Parâmetros utilizados no modelo

aircraft.py Conjunto de funções que descrevem o comportamento da aeronave em decolagem

rk4.py Método de Runge-Kutta de quarta ordem

A.1 settings.py

```

1
1 | global rho, g, W, S, CLwg, CLtg, CLwc, CLtc, mu, Iyy, Vs, lzE,
2 |     lxW, lzW, lxM, lzM, lxT, lzT
3 | # Parameters
4 | # Airplane G
5 | rho    = 1.225
6 | g      = 9.81
7 | W      = 60070
8 | S      = 20
9 | CLwg   = 1.2 # wing lift coefficient on ground (0.8*CLmax)
10 | CLtg   = 0.3 # tail lift coefficient on ground (1/4*CLwg)
11 | CLwc   = 1.35 # wing lift coefficient during climb (0.9*CLmax)
12 | CLtc   = 0.35 # tail lift coefficient during climb (1/4*CLwc)
13 | mu     = 0.03
14 | Iyy    = 25480
15 | Vs     = 44 # based on Learjet 24
16
17 | # Distances (based on Learjet 24)
18 | lzE = 0.85
19 | lxW = 0.8
20 | lzW = 0
21 | lxM = 0
22 | lzM = 0
23 | lxT = 6
24 | lzT = 4.35

```

A.2 aircraft.py

```
1
1 # Modules
2 import numpy as np
3 from math import *
4
5 from settings import *
6
7 # Downwash
8 def downwash(alpha):
9     alpha = np.deg2rad(alpha)
10    eps0 = 0.082
11    deps = 0.3456
12    eps = eps0+deps*alpha
13    return eps
14
15 # Thrust Equation
16 def thrust(V):
17     T0 = 26200
18     k2 = 0
19     k3 = 0
20     T = T0*(1-k2*V+k3*V**2)
21     return T
22
23 # Drag Coefficient
24 def drag_coefficient(CL):
25     CD0 = 0.0431
26     k = 0.08
27     CD = CD0+k*CL**2
28     return CD
29
30 # Aerodynamic Forces
31 def wing_forces(alpha,V,CL):
32     alpha = np.deg2rad(alpha)
33     Lw = 0.5*rho*V**2*S*CL
34     Dw = 0.5*rho*V**2*S*drag_coefficient(CL)
35     Xw = -Lw*sin(alpha)+Dw*cos(alpha)
36     Zw = Lw*cos(alpha)+Dw*sin(alpha)
37     return Xw, Zw
```

```

38
39 def tail_forces(alpha,V,CL):
40     alpha = np.deg2rad(alpha)
41     epsilon = downwash(alpha)
42     Lt = 0.5*rho*V**2*S*CL
43     Dt = 0.5*rho*V**2*S*drag_coefficient(CL)
44     Xt = -Lt*sin(alpha-epsilon)+Dt*cos(alpha-epsilon)
45     Zt = Lt*cos(alpha-epsilon)+Dt*sin(alpha-epsilon)
46     return Xt, Zt
47
48 # Rigid Body Equations
49 def groundrun(t,x):
50     T = thrust(x[1])
51     alpha = 0
52     gamma = x[4]
53     Xw, Zw = wing_forces(alpha,x[1],CLwg)
54     Xt, Zt = tail_forces(alpha,x[1],CLtg)
55     a = g/W*(T[0]-Xw[0]-Xt[0]-mu*(W*cos(gamma)-Zw[0]-Zt[0])
56             -W*sin(gamma))
57     dx = np.array([[x[1]],[a]])
58     return dx
59
60 def transition(t,x):
61     T = thrust(x[1])
62     alpha = np.deg2rad(5)
63     gamma = 0
64     Xw, Zw = wing_forces(alpha,x[1],CLwc)
65     Xt, Zt = tail_forces(alpha,x[1],CLtc)
66     ax = g/W*(T[0]-Xw[0]-Xt[0]-W*sin(gamma))
67     az = g/W*(Zw[0]+Zt[0]-W*cos(gamma))
68     at = 1/Iyy*(T[0]*lxE+Zw[0]*lxW+Xw[0]*lzW-Zt[0]*lxT+Xt[0]*lzT)
69     dx = np.array([[x[1]],[ax],[x[3]],[az],[x[5]],[at]])
70     return dx
71
72 def climb(t,x):
73     T = thrust(x[1])
74     alpha = np.deg2rad(5)
75     gamma = np.deg2rad(7.45)
76     Xw, Zw = wing_forces(alpha,x[1],CLwc)
77     Xt, Zt = tail_forces(alpha,x[1],CLtc)

```

```
78 |     ax = g/W*(T[0]-Xw[0]-Xt[0]-W*sin(gamma))
79 |     az = g/W*(Zw[0]+Zt[0]-W*cos(gamma))
80 |     dx = np.array([[x[1]],[ax],[x[3]],[az]])
81 |     return dx
```

A.3 rk4.py

```

1
1 # Modules
2 import numpy as np
3
4 from settings import *
5
6 def rk4(func,X0,t0,tf,n):
7     # func : array of first-order derivatives f(t,X)
8     # X0 : output initial conditions
9     # t0 : input initial conditions
10    # tf : domain boundary
11    # n : number of steps
12
13    # Initialization
14    dim_l = np.shape(X0)[0]
15    dim_c = n+1
16    t = np.zeros(dim_c)
17    t[0] = t0
18    x = np.zeros((dim_l, dim_c))
19    x[:,0:1] = X0
20    a = np.zeros((dim_l//2, dim_c))
21    # Step heighth
22    h = (tf-t0)/n
23    # Runge-Kutta
24    for i in range(n):
25        k1 = h*func(t[i],x[:,i:i+1])
26        k2 = h*func(t[i]+h/2,x[:,i:i+1]+k1/2)
27        k3 = h*func(t[i]+h/2,x[:,i:i+1]+k2/2)
28        k4 = h*func(t[i]+h,x[:,i:i+1]+k3)
29        t[i+1] = t[i] + h
30        x[:,i+1:i+2] = x[:,i:i+1] + k1/6 + k2/3 + k3/3 + k4/6
31        a[:,i:i+1] = func(t[i],x[:,i:i+1])[1]
32        if i == n:
33            a[:,i+1:i+2] = a[:,i:i+1]
34    return t, x, a

```